گزارش کار آزمایشگاه اندازه‌گیری و مدار

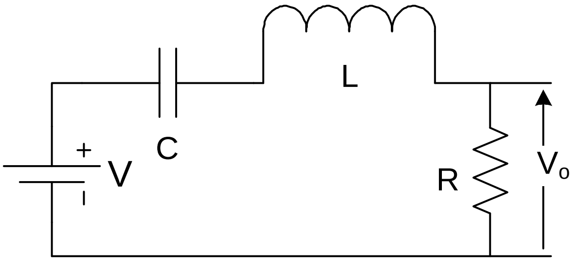
آزمایش شماره‌ی ۱۰

پاسخ گذرای مدار RLC سری

۲۵ آذرماه ۱۳۸۶

به نام خدا

تئوری آزمایش



به هر مداری که در آن ترکیبی از مقاومت، خازن و القاگر به کار رفته‌شده باشد، مدار RLC گفته می‌شود. مدار مقابل یک مدار RLC سری است. می‌خواهیم رفتار مدار روبرو را در حالت گذرا بررسی کنیم.

در آغاز، جریان با گذر از مقاومت و القاگر، به تدریج خازن را پر می‌کند و ولتاژ خروجی (مقاومت) به مقدار پایانی خود نزدیک می‌شود و جفت خازن–القاگر سبب نوسان ولتاژ می‌شود. با پر شدن تدریجی خازن، به دلیل کاهش بزرگی نوسان‌های جریان، نوسان‌های دامنه‌ی ولتاژ خروجی نیز به صفر میل می‌کند و مقدار ولتاژ خروجی به مقدار پایدار میل می‌کند. اما، به دلیل وجود جفت خازن–القاگر و بسته به اندازه‌ی مقاومت، رفتار مدار به گونه‌ای متفاوت خواهد بود. برای مدار بالا داریم:

$$V = V_C + V_L + V_R \text{ و } i = i_C = i_L = i_R \;\rightarrow\; L\frac{di}{dt} + \frac{۱}{C}\int i\,dt + Ri = V \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{d^۲ i}{dt^۲} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{۱}{LC} = V$$

در این مدار مقدار $۲a = \frac{R}{L}$ را با نام «ضریب میرایی» تعریف می‌کنیم و مقدار $\frac{۱}{LC} = w_۰^۲$ را که مجذور فرکانس تشدید است، می‌شناسیم. معادله‌ی بالا را درحالت هم‌گن حل می‌کنیم:

$$\frac{d^۲ i}{dt^۲} + ۲a\frac{di}{dt} + w_۰^۲ = ۰ \;\rightarrow\; s^۲ + ۲as + w_۰^۲ = ۰ \;\Rightarrow\; s_{۱,۲} = -a \pm \sqrt{a^۲ - w_۰^۲}$$

اگر $a^۲ - w_۰^۲ > ۰$ باشد، آنگاه خواهیم داشت $i(t) = k_۱ e^{s_۱ t} + k_۲ e^{s_۲ t}$؛ به این حالت «فرا میرا» می‌گویند و شرط آن در این مدار چنین است $R > ۲\sqrt{\frac{L}{C}} \;\leftarrow\; \frac{۱}{۴}\frac{R^۲}{L^۲} > \frac{۱}{LC} \;\leftarrow\; a^۲ > w_۰^۲$. مقدار $R_c = ۲\sqrt{\frac{L}{C}}$ را به نام «مقاومت بحرانی» می‌شناسیم. پس:

$$\boxed{i(t) = k_۱ e^{s_۱ t} + k_۲ e^{s_۲ t} \;;\; R > ۲\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

این نمودار یک نمایی است که به مقدار بیشینه می‌رسد و سپس، با ثابت زمانی به مقدار پایدار میل می‌کند.

اگر $a^۲ - w_۰^۲ = ۰$ باشد، آنگاه خواهیم داشت $s_۱ = s_۲ = -a$ و $i(t) = kte^{-at}$؛ به این حالت «میرای بحرانی» می‌گویند و شرط آن $R = R_c = ۲\sqrt{\frac{L}{C}}$ است. نمودار آن پس از بیشینه‌شدن، با ثابت زمانی به مقدار پایدار میل می‌کند. پس:

$$\boxed{i(t) = kte^{-at} \;;\; R = ۲\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

اگـــــــر $a^{۲}-w_{۰}^{۲}<۰$ باشـــــد، آنگـــــاه خـــــواهیم داشـــــت $s_{۱,۲}=-a\pm j\sqrt{a^{۲}-w_{۰}^{۲}}=-a\pm j\sqrt{w_{d}}$ و $i(t)=kte^{-at}\sin(w_{d}t+f)$؛ به این حالت «میرای نوسانی» می‌گویند؛ که w_{d} را به نام «فرکانس میرایی» تعریـف می‌کنیم و شرط آن $R<R_{c}$ است. در نمودار آن kte^{-at} یک پوش برای $\sin(w_{d}t+f)$ است. پس:

$$i(t)=kte^{-at}\sin(w_{d}t+f)\ ;\ R<۲\sqrt{\frac{L}{C}}$$

با داشتن شرایط آغـازین، چـون ضـربه نـداریم، $i(۰^{-})=i(۰^{+})$ و $L\frac{di(۰)}{dt}=V_{L}(۰)$ (؛ یعنـی، $\frac{di(۰)}{dt}=\frac{V_{L}(۰)}{L}$) پاسخ معادله دیفرانسیل بدست می‌آید.

روش آزمایش

برای بررسی درست این نمودار، مانند گذشته، از موج مربعی بهـره‌مـی‌بـریم. در آغـاز، جریـان بـا گـذر از مقاومت و القاگر، به تدریج خازن را پر می‌کند. با پر شدن خازن و سپس صفرشدن ولتاژ ورودی در نـیم‌مـوج دوم، خازن، به دلیل وجود مقاومت که عامل میرایی است و انرژی انباشته‌شده در خازن را مصرف می‌کند، با گـذر زمـان تهی شده و ولتاژ خازن و مقاومت خروجی به صفر (مقدار پایدار) میل می‌کند.

در این آزمایش، می‌خواهیم پاسخ مدار را در هر سه حالت گفته‌شده بررسی کنـیم؛ بنـابراین، بـرای آسـانی کار، بهتر است به جای مقاومت ثابت، پتانسیومتر به کار ببریم و با تغییر آن، هر سه حالت مورد نظر را ایجاد کنیم. همچنین، می‌خواهیم مقاومت بحرانی مدار را بدست آوریم، برای این کار در حالت بحرانی، پتانـسیومتر را از مـدار جدا کرده و مقدار آن را اندازه می‌گیریم و برای مقدار تئوری آن نیز از رابطـه‌ی $R=R_{c}=۲\sqrt{\frac{L}{C}}$ بهـره‌مـی‌بـریم و سرانجام خطای آن را بدست می‌آوریم. افزون بر این، ثابت زمانی مدار را می‌خواهیم بدست آوریم. بـرای ایـن کـار بهترین گزینه، بهره‌گیری از نمودار حالت میرایی نوسانی اسـت؛ کـه داریـم $t=\frac{t}{۵}$ و بـرای حالـت تئـوری آن نیـز رابطه‌ی $t=۲\frac{L}{R}$ (البته برای فرکانس‌های کوچک) را به کار می‌گیریم و در پایان خطای آن را نیز بدست می‌آوریم. لازم به گفتن است، برای جلوگیری از آسیب‌دیدن مدار در حالتی که مقدار پتانـسیومتر برابـر صـفر مـی‌شـود، بایـد مقاومتی کوچک را با آن سری کرد. در این صورت مقاومت معادل را اندازه‌می‌گیریم.

داده‌ها و محاسبه‌ها

$\lvert V_{i}\rvert=۲$ V,	C=۳۳ nF,	L=۱۶ mH	
$R_{c(\text{تئوری})}$=۹۶۹/۶۹۷۰ Ω,	$R_{c(\text{عملی})}$=۱/۴۵ kΩ,	$dR=+۴۸۰/۳۰۳$,	$\frac{dR}{R}=۴۹/۵۳٪$
t=۱۲۵ µs,	$\tau_{(\text{عملی})}$=۲۵ µs,	$\tau_{(\text{تئوری})}$=۲۲ µs,	$\frac{dt}{t}=+۱۳/۶۴٪$

نمودار